Analysis II - Lösung

Achtung: Diese Lösungen enthalten bestimmt Fehler, die gerne an manuela.paschkowski@mathematik.uni-halle.de gemeldet werden können.

1. Aufgabe:

Sei $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \|x\| + \|y\|, & x \neq y \end{cases}$$

gegeben, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d)$ ein metrischer Raum ist.

b) Skizzieren Sie die ϵ-Kugeln $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$ für $x_0 = (0,0)$ und $x_0 = (1,0)$.

c) Beweisen Sie: Konvergiert eine Vektorfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. d gegen $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n = x, \forall\, n \geq N.$$

a) Wir beweisen die 3 Eigenschaften einer Metrik

(i) Da $\|\cdot\| \geq 0$ gilt, ist auch $d(x,y) \geq 0, \forall\, x, y$. Außerdem

$$d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee \|x\| + \|y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; x = y = 0$$

(ii) Wenn $x = y$ ist, gilt $d(x,y) = 0 = d(y,x)$. Wenn $x \neq y$ ist, gilt

$$d(x,y) = \|x\| + \|y\| = \|y\| + \|x\| = d(y,x)$$

Also ist d symmetrisch

(iii) Wenn $x = y$ ist, gilt $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y), \forall\, z$, wegen (i). Sei nun $x \neq y$. Es kann sein, dass $z = x$ (analog $z = y$). Dann ist aber

$$d(x,y) = \|x\| + \|y\| = 0 + \|z\| + \|y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

Seien nun x, y, z 3 unterschiedliche Vektoren. Dann gilt

$$d(x,y) = \|x\| + \|y\| \leq \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

b) Wenn $x_0 = (0,0)$ ergeben sich einfach Kreise um den Koordinatenursprung mit Radius ϵ. Sei nun $x_0 = (1,0)$. Wenn $0 < \epsilon \leq 1$ enthält die Kugel nur den Punkt $(1,0)$. Wenn $\epsilon > 1$, dann ergeben sich die Kreise um x_0 mit Radius $\epsilon - 1$.

c) Wenn eine Folge x_n gegen $x_0 \neq 0$ konvergiert, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(x_n, x_0) \leq \epsilon, \qquad \forall\, n \geq N.$$

Setze $\epsilon = \|x_0\|/2 > 0$. Dann gilt für alle $n \geq N$ die Bedingung $d(x_n, x_0) \leq \|x_0\|/2$. Angenommen es gilt für ein Folgeglied $x_n \neq x_0$, dann berechnet sich

$$d(x_n, x_0) = \|x_n\| + \|x_0\| \leq \|x_0\|/2 \qquad \Rightarrow \qquad \|x_n\| \leq -\|x_0\|/2 < 0$$

Widerspruch dazu, dass Normen nicht-negativ sind.

2. Aufgabe:

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \qquad A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

Bonus: Geben Sie je ein Beispiel an, bei dem die Inklusion strikt ist.

Lösung: Sei $x \in \overline{A \cap B}$. Dann existiert eine Folge x_n in $A \cap B$ mit $x_n \to x$. Diese Folge liegt aber auch einzeln in A und B und damit $x \in \overline{A}$, $x \in \overline{B}$ und insbesondere auch im Schnitt. Ein Beispiel dafür, dass die Inklusion auch streng gelten kann, ist $A = (0,1), B = (1,2) \subseteq \mathbb{R}$, da

$$\overline{A \cap B} = \{\} \qquad \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$$

Sei nun $x \in A^\circ \cup B^\circ$. Dann liegt x in A° oder in B°. Wir nehmen den 1. Fall an (der 2. folgt analog). Es muss ein Radius $r > 0$ existieren mit

$$K = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subseteq A$$

Aus $A \subseteq A \cup B$ folgt sofort auch $K \subset A \cup B$ und damit $x \in (A \cup B)^\circ$. Als Beispiel dafür, dass die Inklusion auch streng sein kann, dient $A = [0,1], B = [1,2]$, denn

$$A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2) \quad \Rightarrow \quad 1 \notin A^\circ \cup B^\circ$$
$$(A \cup B)^\circ = [0,2]^\circ = (0,2) \quad \Rightarrow \quad 1 \in (A \cup B)^\circ$$

3. Aufgabe:

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y) \notin M \\ 0, & (x,y) \in M \end{cases}$$

gegeben. Begründen Sie:

a) f ist genau dann partiell differenzierbar in (x,y), wenn $(x,y) \notin M$.

b) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert für alle Einheitsvektoren $v \in \mathbb{R}^2$.

c) f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Lösung:

a) Sei $(x,y) \in M$. Dann ist $x = y \neq 0$ und

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{x+t} - 1 - 0}{t}$$

Da $x \neq 0$ ist, existiert dieser Grenzwert nicht (die Funktion wächst unbeschränkt). Damit ist f in $(x,y) \in M$ nicht partiell nach x differenzierbar.

Sei nun $(x,y) \notin M$ mit $(x,y) \neq (0,0)$. Dann ist f in einer Umgebung identisch mit $e^x - 1$ und daher beliebig oft differenzierbar. Zum Schluss betrachten wir $(x,y) = (0,0)$. Mit der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^0 - 1 - 0}{t} = 0$$

In $(0,0)$ existieren die 1. partiellen Ableitungen.

b) Per Definition ist

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t}$$

Wenn $v_1 = v_2$ gilt, ergibt sich sofort $\partial_v f(0,0) = 0$. Wenn $v_1 \neq v_2$ berechnet mit L'Hospital

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tv_1} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 e^{tv_1}}{1} = v_1$$

c) Angenommen f ist in $(0,0)$ total differenzierbar. Dann ist die totale Ableitung $Df(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (1,0)$ und es muss

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{\|f(h) - f(0,0) - Df(0,0)\cdot h\|}{\|h\|_2} = 0$$

gelten. Für $h \to (0,0)$ mit $h_1 = h_2$ gilt aber

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{\|f(h) - f(0,0) - Df(0,0)\cdot h\|}{\|h\|_2} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{\|0 - 0 - h_1\|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{|h_1|}{\sqrt{2}|h_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

4. Aufgabe:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x - 2y + 3z$ und

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0\right\}$$

gegeben.

a) Warum nimmt f auf M sein Minimum und Maximum an?

b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum von f auf M!

Lösung:

a) M ist eine beschränkte und abgeschlossene Menge und so kompakt. Da f stetig ist, nimmt diese Funktion auf M sein Minimum und Maximum an.

b) Wir stellen die Lagrangsche Funktion und ihren Gradienten auf

$$L(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 3z + \lambda\varphi(x,y,z) = x - 2y + 3z + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 6)$$

$$\nabla L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 + 4\lambda x \\ -2 + 2\lambda y \\ 3 + 2\lambda z \\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 6 \end{pmatrix}$$

Wir wollen alle kritischen Punkte ermitteln, indem wir den Gradienten dem Nullvektor gleichsetzen. Wenn man die 1. drei Gleichungen umstellt, erhält man

$$x = \frac{-1}{4\lambda} \qquad y = \frac{1}{\lambda} \qquad z = \frac{-3}{2\lambda}$$

Eingesetzt in die letzte Gleichung erhält man die 2 Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{3}{4} \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{4}$$

und damit die 2 kritischen Punkte $(x_1, y_1, z_1) = (-1/3, 4/3, -2)$ und $(x_2, y_2, z_2) = (1/3, -4/3, 2)$ mit den Funktionswerten $f(x_1, y_1, z_1) = -9$ und $f(x_2, y_2, z_2) = 9$. Da nach a) das Minimum und Maximum angenommen wird und jeder Extrempunkt ein kritischer Punkt sein muss, folgt

$$\min_{x\in M} f(x) = -9 \qquad \max_{x\in M} f(x) = 9$$

5. Aufgabe:

Seien die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t)$ und die Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y+1)$$
$$g(x,y,z) = (-y, x, y)$$

gegeben.

a) Welche Länge besitzt die Spur von γ ?

b) Sind f oder g Gradientenfelder ?

c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma f(x,y,z)\; d(x,y,z) \qquad\qquad \int_\gamma g(x,y,z)\; d(x,y,z)$$

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Lösung:

a) Es ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^1 \left\|(\sinh(t), \cosh(t), 1)^\top\right\|_2 dt = \int_0^1 \sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t) + 1} dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{2\cosh^2(t)} dt = \sqrt{2}\int_0^1 \cosh(t) dt = \sqrt{2}\sinh(t)|_0^1 = \sqrt{2}\sinh(1)$$

b) f besitzt die Stammfunktion

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xz - \frac{y^2}{2} - yz + z$$

mit $\nabla F = f$ und ist damit ein Gradientenfeld. Da $\frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y,z) = -1$ und $\frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y,z) = 1$ nicht identisch sind, kann g keine Stammfunktion besitzen und ist damit kein Gradientenfeld.

c) γ ist eine Kurve von $\gamma(0) = (1,0,0)$ zu $\gamma(1) = (\cosh(1), \sinh(1), 1)$. Da f ein Gradientenfeld ist, kann man nach 16.18 berechnen

$$\int_\gamma f(x,y,z) d(x,y,z) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = (\cosh(1)^2/2 + \cosh(1) - \sinh(1)^2 - \sinh(1) + 1) - (1/2 + 0 - 0 - 0 + 0) = e^{-1} + 1$$

Da g kein Gradientenfeld ist, muss man das Kurvenintegral nach der Definition auf Seite 38 berechnen

$$\int_\gamma g(x,y,z) d(x,y,z) = \int_0^1 g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\; dt = \int_0^1 (-\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)) \cdot (\sinh(t), \cosh(t), 1)^\top dt$$
$$= \int_0^1 -\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2 + \sinh(t)\; dt = t + \cosh(t)|_0^1 = \cosh(1)$$

6. Aufgabe:
Berechnen Sie die zwei Riemann-Integrale

$$\int_D xe^{xy} d(x,y), \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\},$$

$$\text{und} \qquad \int_M x \; d(x,y),$$

wobei $M \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche ist, die durch $x^2 + y^2 = 1$ und $y + x = 1$ begrenzt wird.

Lösung: $D = [0,1] \times [-1,0]$ ist ein Quader und nach dem Satz von Fubini 17.7 kann mann das Riemann-Integral über Quader für beschränkte Funktionen durch folgendes Mehrfach-Integral lösen (bei Stetigkeit Reihenfolge egal)

$$\int_D xe^{xy} d(x,y) = \int_0^1 \int_{-1}^0 xe^{xy} dy dx = \int_0^1 e^{xy}\big|_{-1}^0 \, dx = \int_0^1 1 - e^{-x} \; dx = x + e^{-x}\big|_0^1 = e^{-1}$$

Nach Abschnitt 17.2 kann man auch das Riemann-Integral über beschränkte Teilmengen M des $\mathbb{R}^2$ und stetigen Funktionen ausrechnen. Der einfachste Fall ist, wenn sich M als **Normalbereich** schreiben lässt. Dies ist eine Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

und φ, ψ sind stetig auf $[a,b]$. Wir wollen M in dieser Form schreiben (Vielleicht Skizze anfertigen: Einheitskreis und Gerade begrenzen Flächenstück im 1. Quadranten). Die Schnittpunkte der Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + y = 1$ liegen bei $(0,1)$ und $(1,0)$. Deswegen muss $x \in [0,1]$ liegen und die Gleichungen nach y umgestellt ergeben $1 - x \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Wenn man sich nicht sicher ist, welcher Funktionsgraph oberhalb des anderen liegt, setzt man einfach um das Riemann-Integral den Betrag.

Für einen Normalbereich M berechnet sich das Riemann-Integral nach 17.14 zu

$$\int_M f(x,y) \; d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy dx$$

Da wir M als Normalbereich in der Form

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], 1 - x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

geschrieben haben, ergibt sich hier

$$\int_M f(x,y) \; d(x,y) = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x \; dy \; dx = \int_0^1 x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \; dy \; dx$$

$$= \int_0^1 x(\sqrt{1-x^2} - (1-x)) \; dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

7. Aufgabe: a) Sei ein *Kegel ohne Spitze*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt. Welche Dimension hat M?

b) Warum ist der *Doppelkegel*

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

a) M ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, wenn es für alle (x, y, z) eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$M \cap U = \{(x, y, z) \in U \mid f(x) = 0\}$$

und $\mathrm{Rang}(Df(x, y, z))$ ist auf U konstant.

Hier kann man die offene Menge $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ und die differenzierbare $f : U \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ wählen. Der Rang von

$$Df(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)^\top$$

ist hier konstant 1. Die Dimension ist $3 - 1$ (Dimension von $\mathbb{R}^3$ minus Rang der Jakobi-Matrix). M ist ein Flächenstück in $\mathbb{R}^3$.

b) In jeder offenen Umgebung von $(0, 0, 0) \in M_2$ müsste man $f(x, y, z)$ auch als $x^2+y^2-z^2$ in $(x, y, z) \neq 0$ wählen und damit auch in $(0, 0, 0)$ genauso fortsetzen. Da aber im Koordinatenursprung die Jakobi-Matrix den Rang 0 und nicht mehr 1 hat, ist M_2 keine Untermannigfaltigkeit.

8. Aufgabe:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_H \frac{1}{(1 + z^2)^2} d(x, y, z)$$

über den Hyperboloiden $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = t, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{1 + t^2}], t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

Eine Koordinatentransformation ist wie eine Substitution im $\mathbb{R}^n$ und das Analogon zur Substitutionsregel ist der Transformationssatz 17.15

$$\int_{\Phi(B)} f(x)dx = \int_B f(\Phi(y))|D\Phi(y)|\ dy$$

Hier wollen wir für $H = \Phi(B)$ die Koordinatentransformation zu

$$B = \{(\varphi, r, t) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{1 + t^2}]\}$$

$$\Phi(\varphi, r, t) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}$$

vornehmen. Dazu benötigen wir

$$D\Phi(\varphi, r, t) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ r\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\det(D\Phi(\varphi, r, t))| = r$$

Wir setzen in den Transformationssatz ein

$$\int_H \frac{1}{(1+z^2)^2}\ d(x,y,z) = \int_B \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot r\ d(\varphi,r,t)$$

Da B ein Normalbereich bzgl. t ist kann man das Riemann-Integral wie in Aufgabe 6 berechnen

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\sqrt{1+t^2}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot r\ d\varphi\ dr\ dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot r\ dr\ dt$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\left(\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1+t^2}}\right) dt = \pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi\lim_{b\to\infty}\arctan(b)-\arctan(-b) = \pi\cdot(\pi/2-(-\pi/2)) = \pi^2$$

9. Aufgabe: a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\ d\sigma$$

über

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{xy}, 1\le y\le 4, y\le x\le 9\}.$$

b) Sei S die Oberfläche der oberen Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}.$$

Verifizieren Sie für $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto(y,z,x)$ den Integralsatz von Stokes.

Lösung:

a) Für ein Flächenstück $S\subset\mathbb{R}^2$ braucht man eine beschränkte Menge $G\subset\mathbb{R}^2$ und eine Parametrisierung $\Phi: G\to\mathbb{R}^3$. Hier

$$G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[1,4], x\in[y,9]\}$$
$$\Phi(x,y) = (x,y,\sqrt{xy})$$

Dann berechnet man das Oberflächenintegral, das auf Seite 89 definiert ist

$$\int_S f\ d\sigma := \int_G f(\Phi(x,y))\cdot\|\partial_x\Phi(x,y)\times\partial_y\Phi(x,y)\|_2\ d(x,y)$$

Für unsere Parametrisierung Φ berechnen wir

$$\partial_x\Phi(x,y) = \begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{y/x}/2\end{pmatrix}\quad \partial_y\Phi(x,y) = \begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{x/y}/2\end{pmatrix}\qquad \partial_x\Phi(x,y)\times\partial_y\Phi(x,y) = \begin{pmatrix}-\sqrt{y/x}/2\\-\sqrt{x/y}/2\\1\end{pmatrix}$$

und damit

$$\|\partial_x\Phi(x,y)\times\partial_y\Phi(x,y)\|_2 = \sqrt{\frac{y^2+x^2+4xy}{4xy}}$$

Eingesetzt in die Formel des Oberflächenintegrals mit f aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$\int_S f\ d\sigma = \int_G \frac{1}{\sqrt{4xy}}\ d(x,y) = \int_1^4\int_y^9 \frac{1}{2\sqrt{xy}}dx\ dy = \frac{-3}{8}$$

b) Hier ist ein Flächenstück $S = \Phi(G)$ mit

$$G = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben (Parametrisierung der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ nur mit positiven z-Koordinaten). Im Satz von Strokes wollen wir das Oberflächenintegral

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu \; d\sigma$$

berechnen. Dabei ist $(\nabla \times F)$ die Rotation (Definition 17.7. Seite 89). Für unser Beispiel ergibt sich

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ν ist der äußere Normaleneinheitsvektor. Die Normierung kann man aber gleich weglassen, da sich die durch die Definition des Oberflächenintegrals wieder rauskürzt.

$$N(\varphi, \theta) = \partial_\varphi \Phi(\varphi, \theta) \times \partial_\theta \Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos^2(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich für das Oberflächenintegral

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot \nu \; d\sigma = \int_G (\nabla \times F) \cdot N(\varphi, \theta) \; d(\varphi, \theta)$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\cos^2(\theta)\cos(\varphi) - \cos^2(\theta)\sin(\varphi) - \cos(\theta)\sin(\theta) \; d\varphi \; d\theta$$

$$\int_0^\pi \cos^2(\theta) \left(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big|_0^{2\pi} \right) - 2\pi \cos(\theta)\sin(\theta) \; d\theta$$

$$= -2\pi \int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta) \; d\theta = \pi \cos^2(\theta)\big|_0^\pi = -\pi$$

Der Satz von Strokes besagt, dass man das selbe Integral mit einem Kurvenintegral

$$\int_{\partial S} F \; dx$$

ausrechnen kann. Der Rand der oberen Einheitskugel ist charakterisiert durch $z = 0$, also durch die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial S} F \; dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin(t), 0, \cos(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \; dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) \; dt = -\frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

Der Satz von Strokes ist verifiziert, da beide Integrale den selben Wert haben.

10. Aufgabe:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

☐ Sei eine Funktionenfamilie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

und das zeigt, dass (f_n) nicht gleichmäßig konvergent ist. Richtig. Es gilt $0 \neq 1$ und nach 12.3 müssten bei gleichmäßiger Konvergenz beide gleich sein (Achtung: Nur hinreichendes, kein notwendiges Kriterium).

☐ Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bildet eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ wieder auf eine offene Menge ab. Falsch. $f(x) = 0$ bildet jede offene Menge auf eine Punkt-Menge ab (abgeschlossen).

☐ Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2+3y^2}(x^2 - 4y + 1), & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist für kein $a \in \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig.

Richtig, da $f(1/n, 1/n) \to 1/5$ und $f(1/n, -1/n) \to -1/5$ für $n \to \infty$.

☐ Der maximale Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ von

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{2x - x^2}}{y - 1}$$

ist entweder offen oder abgeschlossen oder beschränkt.

Falsch, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], y \neq 1\}$ besitzt keine der 3 Eigenschaften.

☐ Die Funktion $f(x,y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$ hat in $(0,0)$ ein lokales Extremum.

Falsch. Das hinreichende Kriterium versagt (erst einmal keine Aussage möglich). Aber man findet mit $(1/n, 0)$ und $(-1/n, 0)$ Punkte, die beliebig nahe an Null dran sein können und immer einen größeren und kleineren Funktionswert haben.

☐ Der Konvergenzradius der folgenden Reihe ist $R = 9$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{2n}} x^{2n}$$

Falsch. Man berechnet

$$R = \limsup_{n\to\infty} (4 + (-1)^n)^2 = 25$$

☐ Das Taylorpolynom zweiten Grades in $x_0 = (0,0,0)$ von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sin(x)\cos(y)e^z$$

hat die Vorschrift $x + \frac{1}{2}xz$

Falsch, es ist $x + xz$

☐ Das Gleichungsystem

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x \cdot y \cdot z &= -1 \end{aligned}$$

ist im Punkt $(1, -1, 1)$ eindeutig nach (y, z) auflösbar.

Richtig, da

$$\begin{pmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ xz & xy \end{pmatrix}$$

in dem Punkt die Determinante -6 hat und damit invertierbar ist.

☐ Für alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren offene Umgebungen $U(x_0, y_0), V(f(x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$, sodass eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : U \to V$ von

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax\cos(y) \\ bx\sin(y) \end{pmatrix}$$

mit $a, b > 0$ existiert. Falsch. Die Determinante der Jakobimatrix ist abx_0. Damit gibt es für alle Punkte mit $x_0 = 0$ keine solche Umgebungen.